4éme Tec et Sci

Série de Révision N°6

Nombres Complexes

EXERCICE N°1 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A(-2i) ; B(4-2i) ; C(4+2i) et D(1).

1/ a- Ecrire $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

2/ A tout point M $\neq$ A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$

a- Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'|$ = 1.

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur.

b- Montrer que pour tout z $\neq$ -2i, z' – 1 = $\frac{-4-4i}{z+2i}$

c- Montrer que : DM'.AM = $4\sqrt{2}$.

d- En déduire que si M appartient à un cercle ζ(A,2) alors M' appartient à un cercle ζ ' que l'on précisera.

3/ Déterminer les ensembles suivants : E = { M(z) $\in$P / |z – 4 + 2i| = 3 }

EXERCICE N°2 :

I/ Soient les nombres complexes z_1 = -1 + i et z_2 = $1+i\sqrt{3}$. On pose : Z = $\frac{z_1}{z_2}$

a- Ecrire Z sous forme algébrique.

b- Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c- En déduire les valeurs exacte de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis calculer Z^{12}.

II/ Soient les points A, B et C d'affixes respectifs : -1 – i, 2 + i et -3 + 2i

a- Ecrire sous forme algébrique : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

III/ Soient les points A, B et C d'affixes respectifs : -2i, $\sqrt{3}-i$ et $\sqrt{3}+i$

a- Ecrire les affixes de A, B et C sous formes exponentielles.

b- Montrer que OACB est un losange.

c- Montrer que $\frac{z_C}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, en déduire une mesure de $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$.

- Quelle est alors la nature du triangle OBC ?

EXERCICE N°3 :

1/ a- Mettre sous forme algébrique $(3 – i)^2$.

b- Résoudre dans C, l'équation : z^2 – (5+3i)z + 2 + 9i = 0

2/ On considère dans C l'équation, (E) : z^3 – (5+2i)z^2 + (5+4i)z + 2i – 9 = 0

a- Vérifier que –i est une solution de (E) .

b- Résoudre dans C l'équation (E) .

3/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : -i, 1 + 2i et 4 + i.

a- Placer les points A, B et C dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$.

b- Ecrire $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.

c- En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE N°4 :

1/ a- Mettre sous forme algébrique : $(1-2i)^2$.
b- Résoudre dans C : $z^2 + z + 1 + i = 0$.
2/ Soit l'équation (E) : $z^3 - z^2 - (1-i)z - 2 - 2i = 0$
a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b- Achever la résolution de l'équation (E).
3/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : 2, -i et -1+i.
a- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe : $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
b- Déduire la nature du triangle ABC.
4/ a- Déterminer les racines cubiques de –i.
b- Déterminer les racines cubiques de –1+i.
c- Résoudre dans C l'équation : $z^6 + z^3 + 1 + i = 0$.
5/ a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : $(1 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} = 2$
b- Soit M'(z') tel que : $z' = \dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}}$. Montrer que $(z'+i)(\bar{z}-i) = 1$.
c- En déduire que : BM'.BM = 1.

EXERCICE N°5 :

I) On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $2e^{i\theta}$, $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$, $\theta \in]0 , \pi[$.
1/ Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.
2/ a- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.
b- Déterminer le réel θ tel que OBAC soit un carré.
3/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_B lorsque θ varie dans $]0 , \pi[$.
II) Soit l'équation (E) : $z^2 - e^{i\theta}z + (1-i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0,2\pi]$.
a- Ecrire sous forme algébrique $(1+2i)^2$.
b- Résoudre dans C, l'équation (E).
On considère les points M, M_1 et M_2, d'affixes respectives : $z_0 = e^{i\theta}$, $z_1 = -ie^{i\theta}$ et $z_2 = (1+i)\, e^{i\theta}$
a- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b- Montrer que le quadrilatère OM_1MM_2 est un parallélogramme.

EXERCICE N°6 :

1) a- Vérifier que : $(1 - i)^2 = -2i$
b- Résoudre dans C, l'équation : $2z^2 - (3+5i)z - 2 + 4i = 0$
2) On considère l'équation dans C, l'équation (E) : $2z^3 - (7 + 5i)z^2 + (4 + 14i)z + 4 - 8i = 0$
a- Vérifier que 2 est une solution de (E).
b- Résoudre alors l'équation (E).
3) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ et $z_C = 1 + i$.
a- Montrer que les triangles OBC et OAC sont rectangle en C.
b- En déduire que les points A, B et C sont alignés.
4) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{3}{2}(1+i)$
a- Montrer que $\dfrac{z'-z_C}{z-z_C} = -\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire que les points C, M et M' sont alignés.